Содержание

[Введение 4](#_Toc468975853)

[1. Основная часть 6](#_Toc468975854)

[1.1. Первая теорема Гёделя о неполноте 6](#_Toc468975855)

[1.2. Вторая теорема Гёделя о неполноте 9](#_Toc468975856)

[1.3. Следствия теорем 11](#_Toc468975857)

[Заключение 14](#_Toc468975858)

[Список используемых источников 15](#_Toc468975859)

Введение

Курт Гёдель – крупнейший специалист по математической логике – родился 28 апреля 1906 г. в Чехии. Окончил Венский университет, где защитил докторскую диссертацию, был доцентом в 1933–1938 гг. После эмигрировал в США. С 1940 по 1963 г. Гёдель работал в Принстонском институте высших исследований. Гёдель – почетный доктор Йельского и Гарвардского университетов, член Национальной академии наук США и Американского философского общества.

В 1931 г. В одном из немецких научных журналов появилась сравнительно небольшая статья с довольно устрашающим названием «О формально неразрешимых предложениях принципиальной математики и родственных систем». Ее автором был двадцатипятилетний математик из Венского университета - Курт Гедель. Работа эта сыграла решающую роль в истории логики и математики. Решением Гарвардского университета она была охарактеризована, как одно из величайших достижений современной логики. Однако в момент опубликования ни название гёделевской работы, ни ее содержание ничего не говорили большинству математиков.

«Принципиальная математика» – это монументальных трехтомный трактат Альфреда Норта Уайтхеда и Бертрана Рассела, посвященный математической логике. Однако знакомство с трактатом не являлось необходимым условием для успешной работы в большей части разделов математики.

Интерес к разбираемым в работе Гёделя вопросам всегда был уделом весьма немногочисленной группы учёных. В то же время, рассуждения, приведенные Гёделем в его доказательствах, были для своего времени столь необычными, что для полного их понимания требовалось исключительное владение предметом и знакомство с литературой, посвященной этим весьма специфическим проблемам.

Итак, **цель** данной работы – рассмотреть теорему Гёделя «О неполноте» и выявить аспекты ее применения. Для достижения поставленной цели необходимо выполнить ряд задач:

1. изучить научную и специальную литературу по данной теме;
2. рассмотреть первую и вторую теоремы и выделить основные отличия;
3. узнать о вариантах трактовки теорем и показать на примерах основную идею;
4. рассмотреть следствия из данной теоремы;
5. сделать вывод по проделанной работе.
6. Основная часть
7. Первая теорема Гёделя о неполноте

**Первая теорема Гёделя о неполноте (слабая теорема)**, по всей видимости, является наиболее знаменательным результатом в математической логике. Она звучит следующим образом:

«Для произвольной непротиворечивой формальной и вычислимой теории, в которой можно доказать базовые арифметические высказывания, может быть построено истинное арифметическое высказывание, истинность которого не может быть доказана в рамках теории. Если можно доказать утверждение A, то можно доказать и утверждение не-A».

Вторая формулировка:

«Любая формальная система аксиом содержит неразрешенные предположения».

Иными словами, если можно доказать справедливость утверждения «предположение 247 недоказуемо», то можно доказать и справедливость утверждения «предположение 247 доказуемо». То есть, если система аксиом полна (то есть любое утверждение в ней может быть доказано), то она противоречива.

Здесь слово «теория» обозначает «бесконечное множество» высказываний, некоторые из которых полагаются истинными без доказательств (такие высказывания называются аксиомами), а другие (теоремы) могут быть выведены из аксиом, а потому полагаются (доказываются) истинными. Словосочетание «доказуемый в теории» обозначает «выводимый из аксиом и примитивов теории (константных символов алфавита) при помощи стандартной логики (первого порядка)». Теория является непротиворечивой (согласованной), если в ней невозможно доказать противоречивое высказывание. Словосочетание «может быть построено» обозначает, что существует некоторая механическая процедура (алгоритм), которая может построить высказывание на основе аксиом, примитивов и логики первого порядка. «Элементарная арифметика» заключается в наличии операций сложения и умножения над натуральными числами. Результирующее истинное, но недоказуемое высказывание часто обозначается для заданной теории как «последовательность Гёделя», однако существует бесконечно количество других высказываний в теории, которые имеют такое же свойство: недоказуемая в рамках теории истинность.

Предположение о том, что теория вычислима, обозначает, что в принципе возможно реализовать компьютерный алгоритм (компьютерную программу), которая (если ей разрешено вычислять произвольно долгое время, вплоть до бесконечности) вычислит список всех теорем теории. Фактически, достаточно вычислить только список аксиом, и все теоремы могут быть эффективно получены из такого списка.

Первая теорема о неполноте была озаглавлена как «Теорема VI» в статье Гёделя от 1931 года. В оригинальной записи Гёделя она звучала как:

«Общий вывод о существовании неразрешимых пропозиций заключается в следующем:

Теорема VI.

Для каждого ω-согласованного рекурсивного класса k ФОРМУЛ существуют рекурсивные ЗНАКИ r такие, что ни (v Genr), ни ¬(v Genr)не принадлежат Flg (k )(где v есть СВОБОДНАЯ ПЕРЕМЕННАЯ r )».

Обозначение *Flg* происходит от нем. *Folgerungsmenge* – множество последовательностей, *Gen* происходит от нем. *Generalisation* – обобщение.

Грубо говоря, высказывание Гёделя *G* утверждает: «истинность *G* не может быть доказана». Если бы *G* можно было доказать в рамках теории, то в таком случае теория содержала бы теорему, которая противоречит сама себе, а потому теория была бы противоречива. Но если *G* недоказуемо, то оно истинно, а потому теория неполна (высказывание *G* не выводимо в ней).

Это пояснение на обычном естественном языке, а потому не совсем математически строго. Для предоставления строгого доказательства, Гёдель пронумеровал высказывания при помощи натуральных чисел. В этом случае теория, описывающая числа, также принадлежит множеству высказываний. Вопросы о доказуемости высказываний представимы в данном случае в виде вопросов о свойствах натуральных чисел, которые должны быть вычислимы, если теория полна. В этих терминах высказывание Гёделя гласит, что не существует числа с некоторым определённым свойством. Число с этим свойством будет являться доказательством противоречивости теории. Если такое число существует, теория противоречива вопреки первоначальному предположению. Так что предполагая, что теория непротиворечива (как предполагается в посылке теоремы), получается, что такого числа не существует, и высказывание Гёделя истинно, но в рамках теории этого доказать невозможно (следовательно, теория неполна). Важное концептуальное замечание состоит в том, что необходимо предположить, что теория непротиворечива, для того чтобы объявить высказывание Гёделя истинным.

1. Вторая теорема Гёделя о неполноте

**Вторая теорема Гёделя** **(сильная теорема)** о неполноте звучит следующим образом:

Для любой формально рекурсивно перечислимой (то есть эффективно генерируемой) теории T, включая базовые арифметические истинностные высказывания и определённые высказывания о формальной доказуемости, данная теория T включает в себя утверждение о своей непротиворечивости тогда и только тогда, когда теория T противоречива.

Или: «Логическая полнота (или неполнота) любой системы аксиом не может быть доказана в рамках этой системы. Для ее доказательства или опровержения требуются дополнительные аксиомы (усиление системы)».

Иными словами, непротиворечивость достаточно богатой теории не может быть доказана средствами этой теории. Однако вполне может оказаться, что непротиворечивость одной конкретной теории может быть установлена средствами другой, более мощной формальной теории. Но тогда встаёт вопрос о непротиворечивости этой второй теории, и т.д.

Использовать эту теорему для доказательства того, что разумная деятельность не сводится к вычислениям, пытались многие. Например, еще в 1961 году известный логик Джон Лукас выступал с подобной программой. Его рассуждения оказались довольно уязвимыми – однако он и задачу ставил более широко. Роджер Пенроуз (английский математик и физик) показал, что теоремы Гёделя можно использовать для доказательства наличия принципиальных различий между человеческим мозгом и компьютером. Смысл его рассуждения прост. Компьютер действует строго логически и не способен определить, истинно или ложно утверждение А, если оно выходит за рамки аксиоматики, а такие утверждения, согласно теореме Гёделя, неизбежно имеются. Человек же, столкнувшись с таким логически недоказуемым и неопровержимым утверждением А, всегда способен определить его истинность или ложность — исходя из повседневного опыта. По крайней мере, в этом человеческий мозг превосходит компьютер, скованный чистыми логическими схемами. Человеческий мозг способен понять всю глубину истины, заключенной в теоремах Гёделя, а компьютерный — никогда. Следовательно, человеческий мозг представляет собой что угодно, но не просто компьютер.

1. Следствия теорем

Следствия теорем затрагивают философию математики, особенно такие формализмы, которые используют формальную логику для определения своих принципов. Можно перефразировать первую теорему о неполноте следующим образом: «*невозможно найти всеохватывающую систему аксиом, которая была бы способна доказать* ***все*** *математические истины, и ни одной лжи*». С другой стороны, с точки зрения строгой формальности, эта переформулировка не имеет особого смысла, поскольку она предполагает понятия «истина» и «ложь» определёнными в абсолютном смысле, нежели в относительном для каждой конкретной системы.

А вот такое перефразирование второй теоремы является ещё более тревожным для основ математики:

Если невозможно доказать непротиворечивость**и полноту**системы в рамках неё самой, то эта система противоречива.

Следовательно, для установления факта непротиворечивости некоторой системы *S* необходимо использовать *более мощную* систему *T*, но доказательство в рамках *T* не может быть полностью законченным, пока не доказана непротиворечивость самой *T* (причём без использования системы *S*).

Вначале казалось, что всё-таки теоремы Гёделя оставляют немного надежды, поскольку можно создать общий алгоритм, который решает, является ли заданное утверждение разрешимым или нет. Этот алгоритм позволит математикам обойти все неразрешимые проблемы сразу вместе. Однако, отрицательный ответ на проблемы выбора, полученный в 1936 году, показал, что такого алгоритма не существует.

Некоторые исследователи предполагают, что утверждение, которое недоказуемо в рамках дедуктивной системы, может быть совершенно доказуемо на некотором метаязыке. А то, что не может быть доказано на этом метаязыке, может, в свою очередь, быть доказано на мета-*метаязыке* , и так до бесконечности. Применяя такие системы типизированных метаязыков совместно с аксиомой редуцируемости, которая по индуктивному предположению применяется ко всему набору языков, можно для любых областей знаний обходить проблему неполноты.

Необходимо также отметить, что теоремы Гёделя применимы только к *достаточно сильным* системам аксиом. «Достаточно сильный» в данном контексте обозначает, что теория содержит достаточно средств для представления данных, необходимых для доказательства первой теоремы о неполноте. Существенно то, что для этого нужны базовые аксиомы, представляющие операции сложения и умножения, как, к примеру, в арифметике Робинсона Q. Существуют более слабые системы аксиом, которые полны и непротиворечивы, например, арифметика Пресбургера, которая доказывает истинность утверждений первого порядка только относительно сложения.

Система аксиом может содержать бесконечное количество аксиом (как, к примеру, арифметика Пеано первого порядка), но для применимости к такой системе теоремы Гёделя должен быть эффективный алгоритм, который позволяет проверять корректность. Например, можно рассмотреть множество всех высказываний первого порядка, которые истинны в стандартной модели натуральных чисел. Эта система полна, но теорема Гёделя неприменима в данном случае, поскольку не существует эффективной процедуры, которая определяет, является ли заданная последовательность аксиомой. Фактически, это так по следствию из первой теоремы Гёделя о неполноте.

Другой пример теории, к которой неприменима первая теорема Гёделя о неполноте, может быть построен следующим образом: необходимо отсортировать все возможные истинные утверждения относительно натуральных чисел сначала по длине строки, а затем лексикографически. Далее система аксиом строится так – вначале берётся система аксиом Пеано, после чего необходимо в списке утверждений выбирать первое по порядку утверждение, которое не может быть доказано. Далее это утверждение вносится в список аксиом новой системы. И так до конца. В конечном итоге этот процесс создаст полную, непротиворечивую и достаточно мощную формальную систему, которая, однако, не будет перечислимой.

Сам Гёдель доказал технически более слабые версии теорем. Первое доказательство теорем в приведённых в статье формулировках впервые было приведено Д.Б. Россером в 1936 году.

По существу, доказательство первой теоремы содержит процесс конструирования утверждения *p* в рамках формальной системы, которое можно описать на метаязыке следующим образом:

*p* = «Это утверждение не может быть доказано в рассматриваемой формальной системе»

Как видно, это, всего лишь, современный вариант парадокса лжеца, который в отличие от классической формулировки, не совсем парадоксальный.

Если система аксиом непротиворечива, доказательство теоремы Гёделя показывает, что *p* (и его отрицание) не могут быть доказаны в рамках системы. Следовательно, утверждение *p* истинно (это утверждение о том, что оно само недоказуемо, и оно действительно недоказуемо). Если система аксиом *ω* -непротиворечива, то отрицание *p* также не может быть доказано, и таким образом *p* не вычислимо. В системах, которые *ω* -противоречивы (но непротиворечивы), либо имеется такая же ситуация, либо утверждение ¬*p* может быть доказано.

Добавление утверждения *p* в качестве аксиомы не решает проблемы, поскольку для такой расширенной системы будет существовать иное утверждение Гёделя. Такие теории, как арифметика Пеано, для которых не может быть построено перечислимого расширения, называются *существенно неполными.*

Заключение

Для простых систем исчислений доказательство их непротиворечивости вполне возможно. Но в случае арифметики и теории множеств - двух образцовых математических теорий - ситуация оказывается довольно необычной и непредвидимой с позиций здравого смысла. Согласно теореме о неполноте, в достаточно богатых формальных непротиворечивых системах, содержащих арифметику, всегда находятся неразрешимые формулы, которые одновременно и недоказуемы, и неопровержимы. Итак, формальная аксиоматическая, достаточно богатая содержанием, непротиворечивая система неполна, а ее непротиворечивость недоказуема. Так, теорема К. Гёделя о неполноте утверждает, что никакой конечной системой аксиом нельзя выразить полностью.

Из сказанного можно сделать вывод, что истины логические и истины математические принципиально различны относительно формализации (и аксиоматизации) логики и математики. Логические истины выразимы конечной системой аксиом, а математические - невыразимы. На этой базе можно сделать вывод о качественном различии аналитической истинности: истины аналитические и логические качественно отличаются от истин математических. Правда, теоремы К. Гёделя лишь косвенно свидетельствуют об этом различии. Этот семантический подход в логике и математике дает возможность утверждать, что по основанию истинности логика и математика принципиально различны.

По окончанию написания курсовой работы основная *цель* была достигнута. Для ее достижения была изучена, использована и закреплена различная научная литература, выделены особенности теоремы Гёделя «о неполноте», ее формулировки и следствия. Был выбелен ряд примеров, раскрывающих основную идею данной теоремы.

Список используемых источников

1. Вводный курс по математической логики - [Верещагин Н.К.](http://www.knigafund.ru/authors/19452), [Успенский В.А.](http://www.knigafund.ru/authors/23613), Плиско - 2007. - 126 с.
2. В.А. Успенский. Теорема Геделя о неполноте. - М.: Наука, 1982.
3. Теорема Геделя / Э. Нагель, Дж. Ньюмен. - М.: Красанд, 2010. - 120 с.
4. Математическая логика - [Ершов Ю.Л.](http://www.knigafund.ru/authors/28024), Палютин Е.А.- 2011. - 356 с.
5. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов – Лавров И.А., Максимова Л.Л.2014. - 57 с.